COME SALVARE VITE E COMPRARSI LE SEYCHELLES USANDO LA TEORIA DELLA MISURA

Marco Abate

Dipartimento di Matematica

Una delle tipiche domande che un matematico si vede rivolgere quando esce dalla sua torre d'avorio (ops, volevo dire dalla sua torre di plastica, l'avorio non è più ecologicamente corretto) è: "Ma a cosa serve la matematica?". In questo breve intervento voglio offrire una possibile risposta a questa domanda presentando due argomenti matematici che scaturiscono dalla stessa teoria, uno di utilità evidente e l'altro assolutamente inutile.

Tutti conoscono, almeno per sentito dire, cos'è la TAC (Tomografia Assiale Computerizzata), e nessuno ne mette in dubbio l'utilità e importanza. Tramite la TAC è possibile ricostruire un modello fedele e tridimensionale dell'interno del corpo del paziente, modello che può permettere di individuare in tempo la presenza di tessuti malati, per esempio agglomerati di cellule tumorali.

Quello che non molti sanno invece è che la TAC è la diretta applicazione di uno strumento matematico chiamato *Trasformata di Radon,* creato nel 1917 dal matematico ungherese J. Radon nel corso delle sue ricerche in Teoria della Misura (una branca importante dell'Analisi Matematica), e da allora oggetto di studi da parte di innumerevoli matematici. Come vedremo, il passaggio dallo strumento matematico all'applicazione medica è diretto, quasi senza intermediari, anche se è stato necessario aspettare la fine degli anni '60 perché fosse sviluppata la tecnologia necessaria per rendere concretamente attuabile questo passaggio.

Vale la pena sottolineare fin da subito che Radon non aveva in mente alcuna applicazione, medica o altro, per la sua trasformata; del resto, ai suoi tempi i computer erano di là da venire, e i raggi X una novità recente ancora guardata con sospetto. L'intuizione della possibile applicazione medica è invece dovuta ad A.M. Cormack e G.N. Hounsfield, rispettivamente un fisico con ampi interessi matematici e medici, e un ingegnere con vaste conoscenze mediche. Cormack nel 1963 descrisse come applicare (un caso particolare de) la trasformata di Radon per ottenere radiografie tridimensionali e realizzò i primi prototipi, mentre Hounsfield nel 1968 costruì, partendo dai lavori di Cormack, le prime macchine effettivamente funzionanti per la TAC. Per questo motivo furono entrambi insigniti del Premio Nobel in Medicina nel 1979 (quando Radon era morto da un pezzo).

Ma vediamo di descrivere a grandi linee in cosa consiste la TAC, e qual è la relazione con la trasformata di Radon. Per far ciò, cominciamo ricordando come funzionano le usuali radiografie.

Per effettuare una radiografia, si pone il paziente fra una sorgente di raggi X e una lastra fotografica. I raggi X, attraversando il paziente, vengono in parte o completamente assorbiti, secondo il tipo di tessuto che incontrano. Per esempio, le ossa assorbono quasi completamente i raggi X, mentre i muscoli e la pelle li fanno passare quasi (ma non completamente) intatti. La lastra fotografica è quindi colpita dai raggi X che hanno attraversato il paziente, diventando più o meno scura in funzione dell'intensità del raggio che la colpisce. Se il raggio ha attraversato soltanto pelle e muscoli, colpisce la lastra fotografica quasi con la stessa intensità con cui era partito, e quindi la lastra diventa praticamente nera in quel punto. D'altra parte, se il raggio ha incontrato un osso, è stato quasi completamente assorbito, e quindi esce dal paziente con un'intensità minima — e la lastra rimane bianca. Il risultato finale è l'immagine che tutti conosciamo, in cui le ossa sono evidenziate in bianco su sfondo scuro.

Un esame più accurato rivela che la radiografia fornisce anche altre informazioni. La tonalità di grigio in un punto della lastra indica esattamente *quanto* il raggio X che l'ha colpito è stato assorbito dal corpo del paziente: bianco, assorbimento completo; nero, nessun assorbimento; grigio, assorbimento parziale. Ciascun tipo di tessuto assorbe i raggi X in modo diverso, cambiando comportamento anche secondo il suo stato di salute (per esempio, il tessuto cerebrale sano assorbe più del tessuto cerebrale tumorale). La tonalità di grigio che appare sulla radiografia in un punto preciso somma gli assorbimenti di tutti i tessuti attraversati dal raggio arrivato in quel punto, riassumendo per così dire in un unico valore tutto il suo viaggio.

Chiaramente, una sola radiografia non è sufficiente per ricostruire con precisione la disposizione dei tessuti del paziente; una miriade di disposizioni diverse può produrre le stesse tonalità di grigio finali, lo stesso riassunto. Ma supponiamo di effettuare una seconda radiografia, da un'angolazione diversa; e poi una terza, e una quarta, sempre da angolazioni diverse. Ognuna di queste radiografie contiene il riassunto dei tessuti attraversati; e (ed è questo il punto cruciale) *questi riassunti devono essere tutti coerenti fra di loro.* Sono tutte radiografie del medesimo paziente; quindi devono raccontare la stessa storia, solo vista da angolazioni diverse. Se una singola radiografia poteva essere compatibile con miriadi di disposizioni diverse dei tessuti, due radiografie distinte saranno compatibili con molte meno disposizioni, tre radiografie con ancora meno disposizioni… ed è ragionevole sperare che con un numero finito (e possibilmente piccolo) di radiografie sia possibile ricostruire con sufficiente precisione la disposizione esatta (e tridimensionale) dei tessuti del paziente.

Per trasformare questa speranza in un fatto concreto occorre la matematica. Dal discorso appena fatto è chiaro che (almeno in prima approssimazione) l'unica proprietà del tessuto che entra in gioco è la sua capacità di assorbimento delle radiazioni. Questa capacità si misura con un numero; quindi il corpo del nostro paziente è completamente descritto dalla funzione che associa a ciascun punto del corpo la capacità di assorbimento delle radiazioni del tessuto presente in quel punto.

Ora, quando un raggio X attraversa il corpo, l'assorbimento totale è la somma degli assorbimenti dovuti alla capacità di assorbimento dei tessuti attraversati. In termini matematici, l'assorbimento totale è l'*integrale* della capacità di assorbimento lungo la retta percorsa dal raggio X.

Dunque le radiografie sono rappresentabili da una nuova funzione: quella che associa a ciascuna retta che attraversa il corpo del paziente l'integrale della capacità di assorbimento lungo quella retta. Questa nuova funzione è la *trasformata di Radon* della funzione capacità di assorbimento, ed è esattamente il tipo di trasformata studiata da Radon in generale negli anni '10, senza preoccuparsi di cosa rappresentasse la funzione "capacità di assorbimento" che lui voleva trasformare.

Le radiografie sono dunque la visualizzazione della trasformata di Radon del corpo del paziente; l'obiettivo della TAC è ricostruire da queste la disposizione esatta dei tessuti, cioè la funzione capacità di assorbimento originale. In termini tecnici, si vuole effettuare l'*antitrasformata di Radon:* si vuole ritrovare la funzione di partenza avendo a disposizione il risultato della trasformata. E i lavori da Radon permettono di fare esattamente questo, fornendo addirittura una formula esplicita per l'antitrasformata.

Ovviamente, il passaggio dalla trasformata di Radon alla realizzazione di un macchinario efficiente per la TAC non è elementare. Bisogna costruire dei sistemi in grado di emettere raggi X in direzioni precise e in grado di misurare esattamente quanto sono assorbiti; e bisogna scrivere programmi al computer che implementino al meglio i calcoli matematici necessari per effettuare l'antitrasformata di Radon. La TAC come la conosciamo noi è quindi il risultato finale di una continua e proficua collaborazione fra matematici, fisici, informatici, ingegneri e medici. Ma questo non toglie nulla al fatto che la TAC non potrebbe esistere senza le ricerche in Teoria della Misura sviluppate da Radon senza alcuna applicazione particolare in mente, cinquant'anni prima che la tecnologia necessaria per realizzare la TAC venisse creata.

Vediamo ora un altro risultato di Teoria della Misura, dimostrato più o meno negli stessi anni in cui Radon studiava la sua trasformata: il *Teorema di Banach-Tarski.* Questo teorema — ottenuto nel 1924 da due matematici polacchi, S. Banach e A. Tarski — afferma che è possibile prendere una palla d'oro, dividerla in un numero finito di pezzi, e rimetterli insieme in modo da formare ***due*** palle d'oro della ***stessa*** dimensione di quella di partenza.

Sì, avete letto bene: stiamo parlando della moltiplicazione dei pani e dei pesci. Si parte da una palla d'oro, e se ne ottengono due uguali. Ripetendo il procedimento un numero sufficiente di volte, ci si procura abbastanza oro da comprare le Seychelles, o qualunque altro paradiso tropicale si desideri. E non si tratta di un miracolo: è un teorema matematico, completamente dimostrato, che spiega anche esattamente come si deve procedere per effettuare la duplicazione.

Sfortunatamente, c'è un inghippo (se non ci fosse, molto probabilmente non sarei qui a parlare con voi ma mi starei godendo la mia isoletta privata). Un passaggio cruciale del metodo per effettuare la duplicazione richiede che si effettuino infinite scelte contemporaneamente. Ma noi poveri esseri umani siamo entità finite; non siamo in grado di effettuare infinite scelte contemporaneamente. E quindi, con grande sollievo dei governanti delle Seychelles, il metodo trovato da Banach e Tarski è puramente teorico, e privo di qualsiasi applicazione pratica.

Le applicazioni matematiche non mancano, però. La principale conseguenza del risultato di Banach e Tarski è che, comunque si voglia definire il volume (o il peso) di un solido tridimensionale, esistono dei solidi di cui *non è possibile* misurare il volume. Se potessimo misurare il volume di tutti i pezzi in cui abbiamo suddiviso la nostra palla d'oro, la somma totale dei volumi dei pezzi dovrebbe essere uguale al volume della palla di partenza, e non potrebbe mai essere uguale al doppio. Quindi l'unica via d'uscita a questa apparente contraddizione è che *non* è possibile misurare il volume (o il peso) di *almeno uno* dei pezzi. Se prendessimo questo pezzo d'oro e lo mettessimo su una bilancia qualsiasi, la bilancia si romperebbe. Nessuna bilancia, per quanto sofisticata, potrebbe misurarne il peso.

Abbiamo quindi descritto due argomenti diversi provenienti dalla Teoria della Misura, sviluppati più o meno negli stessi anni. Uno di questi, la trasformata di Radon, ha avuto applicazioni spettacolari e inaspettate nel campo della medicina, contribuendo a salvare migliaia di vite; l'altro, il Teorema di Banach-Tarski, ha un enunciato che colpisce e inaspettate conseguenze teoriche, ma dal punto di vista pratico è assolutamente inutile. Però, questi risultati hanno qualcosa in comune: sono entrambi frutto di studi nello stesso campo, e di studi che in entrambi i casi hanno portato a risultati imprevisti, non preventivati, e molto più interessanti di quanto si potesse immaginare. Radon, Banach e Tarski non sapevano *dove* le loro ricerche li avrebbero portati, e men che meno quali applicazioni avrebbero avuto; erano guidati dalla sete di conoscenza, e dal desiderio di effettuare ricerche in direzioni inesplorate, confidando sul fatto che, insistendo abbastanza, avrebbero scoperto qualcosa di interessante. Ma quando iniziarono le loro ricerche *non sapevano* cosa avrebbero scoperto, o in quanto tempo, o quale dei loro risultati avrebbe potuto, mezzo secolo dopo, salvare migliaia di vite.

Questa è una caratteristica fondamentale e portante di buona parte della ricerca di base: quando si inizia uno studio *non si sa con certezza* a quali conclusioni si arriverà, e in quanto tempo. Certo, si formulano delle ipotesi, si hanno delle aspettative, ma spesso e volentieri i risultati finali sono diversi da quanto previsto, e proprio per questo alquanto più interessanti delle aspettative iniziali. Del resto, se si sapesse sempre fin dall'inizio dove si andrà a finire non si parlerebbe di ***ricerca,*** si parlerebbe di ***ritrova…***

Una conseguenza inevitabile di questo stato di cose è che per fare della buona ricerca di base è fondamentale poter lavorare con serenità su tempi medio-lunghi. È fondamentale avere la certezza di poter seguire i risultati delle proprie ricerche ovunque questi ci portino, senza l'assillo di dover necessariamente raggiungere un obiettivo prestabilito in tempi prestabiliti, in quanto l'obiettivo prestabilito potrebbe rivelarsi impossibile, o illusorio, o molto meno interessante di quanto in realtà si potrebbe ottenere.

Il disegno di legge Moratti sullo stato giuridico, se approvato, renderebbe impossibile tutto questo. Se approvato, buona parte della carriera di un qualsiasi docente universitario diventerebbe costituita da lunghi periodi di precariato, duranti i quali sarebbe imperativo ottenere risultati (di qualsiasi genere e qualità) per avere la speranza (ma non la certezza) di ottenere un rinnovo del proprio posto precario, e forse, prima o poi, un posto fisso. Con inoltre la prospettiva di ritornare precario a ogni avanzamento di carriera. In una situazione del genere diventa impossibile dedicarsi a ricerche innovative, profonde, stimolanti, che sono tutte a lungo termine. Nella ricerca di base gli unici risultati che si possono ottenere con certezza entro scadenze precise sono quelli che si sanno già essere quasi sicuramente veri prima di cominciare la ricerca; e quindi sono, per definizione, quelli meno interessanti. Il disegno di legge Moratti sullo stato giuridico, se approvato, renderebbe di fatto estremamente difficile tutte le ricerche di base innovative, e renderebbe in particolare impossibile la partecipazione ad esse dei giovani ricercatori.

Se il disegno di legge Moratti fosse stato in vigore negli anni '20, Radon, Banach e Tarski non avrebbero certo potuto permettersi di occuparsi di Teoria della Misura come hanno fatto. E ora non avremmo il teorema di Banach-Tarski, e neanche la TAC, e non avremmo potuto salvare migliaia di vite.

Per maggiori informazioni sulla Trasformata di Radon e la TAC si consulti l'articolo: E. Casadio Tarabusi, *La trasformata di Radon e le applicazioni alla medicina,* In **Matematica e cultura 2000,** a cura di M. Emmer, Springer Italia, Milano, 2000, pagg. 319–329.

Per maggiori informazioni sul Teorema di Banach-Tarski si consulti l'articolo:

R.M. French, *The Banach-Tarski theorem,* The Mathematical Intelligencer **10,** n. 4 (1988), 21–28.